Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Zahlentheorie I (Algebraische Zahlentheorie), WiSe 22/23
Blatt 10

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ ein Zahlkörper und seien M und N vollständige Gitter im zugehörigen Zahlring $\mathcal{O}_K$ mit $N \subseteq M$. Weisen Sie nach, dass $\operatorname{disc}(N) = [M : N]^2 \operatorname{disc}(M)$ ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Sei $B_r(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ der offene Ball um den Ursprung mit Radius r. Weisen Sie kurz nach, dass $\mu(B_r(0)) \geq (\frac{2r}{\sqrt{n}})^n$ sein muss.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ ein vollständiges Gitter. Zeigen Sie, dass es einen Punkt $x \in \Gamma \setminus \{0\}$ gibt, mit $\|x\|_\infty \leq |\operatorname{vol}(\mathbb{R}^n \mid \Gamma)|^{\frac{1}{n}}$.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Nutzen Sie Aufgabe 3, um zu zeigen, dass sich jede Primzahl p mit $p = 1 \bmod 4$ als Summe zweier Quadrate schreiben lässt.